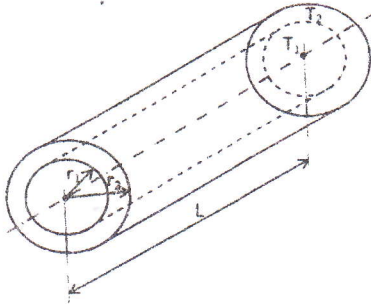


التمرين: 01:



- استخراج المعادلة العامة للتوصيل في الإحداثيات الأسطوانية
- استخراج معادلة توزيع الحرارة $T(r)$ في الإحداثيات الأسطوانية بدون توليد حراري للشكل المقابل
- استنتاج علاقة التدفق الحراري والمقاومة الحرارية الشروط الحدودية

$$\begin{cases} \text{à } r = r_1 : T(r_1) = T_1 \\ \text{à } r = r_2 : T(r_2) = T_2 \end{cases}$$

التمرين: 02:

- (1) استخراج معادلة توزيع الحرارة لزعفة لا متناهية في الطول (Ailette infiniment long) ثم أحسب درجة الحرارة T_x عند $X=80\text{mm}$ إذا كانت درجة حرارة القاعدة $T_b=200^\circ\text{C}$ ودرجة حرارة الهواء $T_\infty=35^\circ\text{C}$ و $m=11.89$
- (2) استخراج معادلة توزيع الحرارة و التدفق الحراري لزعفة متناهية في الطول $X=L \rightarrow T=TL$
- (3) أحسب درجة الحرارة و التدفق الحراري عند

$T(X)$; $\phi(X)$ المنحنيين ثم أرسم $X=0\text{m}, X=0.2\text{m}, X=0.4\text{m}, X=0.6\text{m}, X=0.8\text{m}, X=1\text{m}$

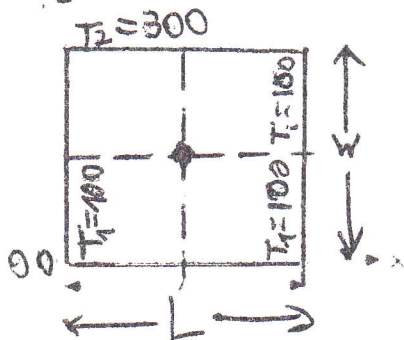
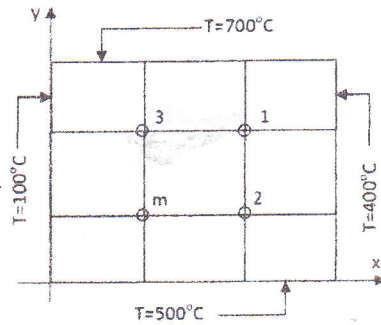
$$\begin{aligned} \lambda &= 384 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1} \\ h &= 34.9 \text{ m}^{-2}\text{K}^{-1} \\ T_0 &= 120^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= 5 \text{ cm} \\ L &= 1 \text{ m} \\ S &= \pi R^2 \\ P &= 2\pi R \\ \text{section droite} & \\ T_F &= 20^\circ\text{C} \\ \text{périmètre} & \end{aligned}$$

التمرين: 03:

- (1) باستعمال طريقة المتفرقات المنتهية (Méthode des différences finies)

أحسب T_1, T_2, T_3 حيث $346^\circ\text{C} = T_m$ $y\Delta = x\Delta$



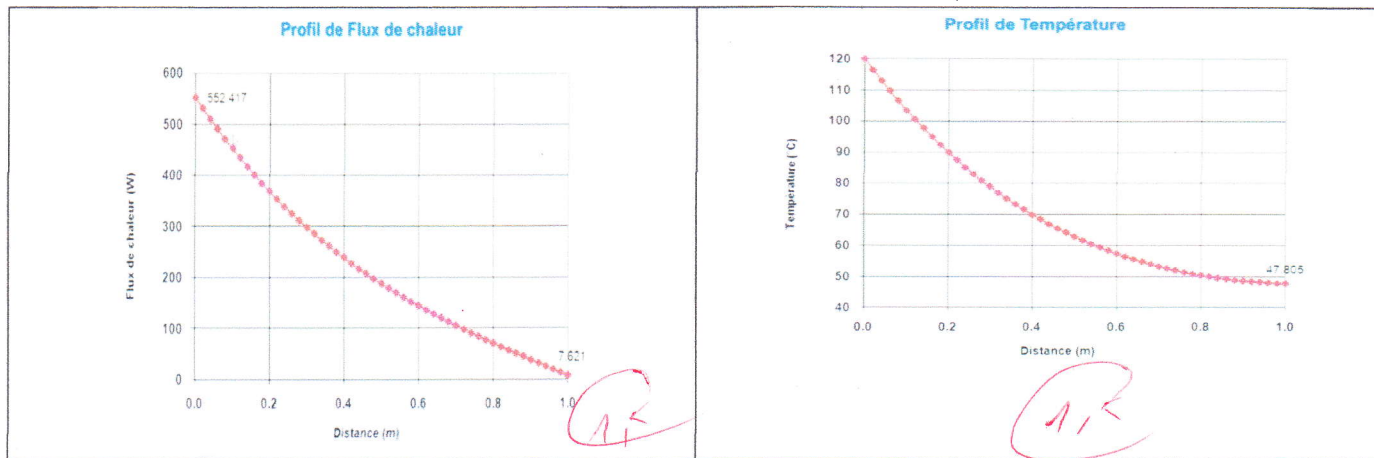
- (2) ليكن جدار على شكل مستطيل أبعاده $L=1\text{m}$ و $W=2\text{m}$ بالاستعانة بطريقة فصل المتغيرات وتحويل فوريي

Méthode de Séparation des variables et transform de Fourier

أحسب $T(0.5, 1)$

نكتفي ب 4 نقاط غير معدومة

$$\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$



التمرين 3:

$$\theta(x,y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi W/L)}$$

$T(0,1) = 100$
 $\frac{100 - 100}{300 - 100} = 0,0549 \rightarrow T(0,1) = 111,5$

$n=1 \rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi W}{L}\right)} = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{1}\right)} = 0,8647$
 $n=3 \rightarrow \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{3\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi W}{L}\right)} = \frac{2}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{3\pi}{1}\right)} = -0,3810$
 $n=5 \rightarrow \frac{2}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{5\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{5\pi W}{L}\right)} = \frac{2}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{5\pi}{1}\right)} = 6,0110$
 $n=7 \rightarrow \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7\pi x}{L}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{7\pi y}{L}\right)}{\sinh\left(\frac{7\pi W}{L}\right)} = \frac{2}{7} \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sinh\left(\frac{7\pi}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{7\pi}{1}\right)} = -8,0410$

$$T_{m+1,n} + T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1} - 4T_{m,n} = 0$$

$$\begin{cases} T_2 + T_3 + 700 + 400 - 4T_1 = 0 \\ T_1 + T_m + 500 + 400 - 4T_2 = 0 \\ T_1 + T_m + 100 + 700 - 4T_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4T_1 + T_2 + T_3 = -1100 \\ T_1 - 4T_2 + 0T_3 = -1246 \\ T_1 + 0T_2 - 4T_3 = -1146 \end{cases}$$

Sous forme matricielle:

$$[A] \cdot [T] = [C]$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [A]^{-1} \cdot [C], [A]^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ct}, \det A = (-1)^{i+j} |A|_i, A^t = [M_{ij}] \Rightarrow A^{ct} = [M_{ji}]$$

$$\det A = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + \dots = -56$$

$$A^t = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} & M_{31} \\ M_{12} & M_{22} & M_{32} \\ M_{13} & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 16;$$

$$M_{12} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\dots = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix} = \dots;$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix}, A^{ct} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-56} \begin{bmatrix} 16 & 4 & 4 \\ 4 & 15 & 1 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1100 \\ -1246 \\ -1146 \end{bmatrix};$$

$$\begin{cases} T_1 = \frac{1}{-56} [16 \cdot (-1100) + 4 \cdot (-1246) + 4 \cdot (-1146)] = 485,14 \text{ C} \\ T_2 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 15 \cdot (-1246) + 1 \cdot (-1146)] = 432,78 \text{ C} \\ T_3 = \frac{1}{-56} [4 \cdot (-1100) + 1 \cdot (-1246) + 15 \cdot (-1146)] = 407,78 \text{ C} \end{cases}$$

Vérification

$$-4 \cdot (485,14) + 432,78 + 407,78 = -1100 \text{ C}$$

بقسمة طرفي المعادلة % $2\pi dr$

$$\dot{q}r + \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial t}{\partial r} \right) = \rho C r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\dot{q}r + \left[kr \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + k \frac{\partial t}{\partial r} \right] = \rho C r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad : \text{بقسمة } kr \%$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dt}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

معدل زيادة طاقة العنصر = معدل توليد الحرارة - التغير في سريان الحرارة

$$\dot{q} 2\pi r dr - \frac{\partial Q}{\partial r} dr = \rho C 2\pi r \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

$$\dot{q} 2\pi r dr - \frac{\partial}{\partial r} \left[-k 2\pi r \frac{\partial t}{\partial r} \right] dr = \rho C 2\pi r dr \frac{\partial t}{\partial \tau}$$

(2)

$$\Rightarrow T(r) = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln(r) + T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \frac{\ln(r_1)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1$$

$$\Rightarrow T(r) = T_1 + \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) \quad (2-12)$$

- L'expression de la densité de flux thermique est donnée par:

$$\varphi = -K \frac{dT}{dr} = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r} = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r}$$

- L'expression de flux thermique est donnée par:

$$\Phi = \varphi \cdot S = -K \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi r \cdot L = 2\pi K L \cdot \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$$

- L'expression de la résistance thermique est donnée par: $R = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi K L}$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

$$\int \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) dr = r \frac{dT}{dr} = C_1$$

$$\int dT = C_1 \int \frac{dr}{r} \Rightarrow T(r) = C_1 \ln(r) + C_2$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 , sont déterminées à partir des conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{à } r = r_1: T(r_1) = T_1 = C_1 \ln(r_1) + C_2 \quad (a) \\ \text{à } r = r_2: T(r_2) = T_2 = C_1 \ln(r_2) + C_2 \quad (b) \end{array} \right.$$

$$(a)-(b): T_1 - T_2 = C_1 (\ln(r_1) - \ln(r_2)) = C_1 \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) \Rightarrow C_1 = (T_1 - T_2) / \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (a), nous obtenons C_2 par:

$$C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_1) / \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

En remplaçant C_1 par son expression dans (b), nous obtenons C_2 par:

$$C_2 = T_2 - (T_1 - T_2) \cdot \ln(r_2) / \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

التمرين: 02

Un cylindre de 0,10 m de diamètre et de 1 m de long est encastré dans la surface d'un bloc de cuivre dont la température est de 120°C. Ce cylindre est plongé dans un courant d'air à la température de 20°C. La conductivité du cuivre est $\lambda = 384 \text{ W.m}^{-1}.\text{°C}^{-1}$ et le coefficient de transfert convectif est $h_c = 34,9 \text{ W.m}^{-2}.\text{°C}^{-1}$. Tracer en fonction de la distance x à l'encastrement, les courbes donnant la température et le flux de chaleur dans la barre.

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + hP dx (T(x) - T_\infty)$$

$$\Rightarrow -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x = -\lambda S \left[\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx \right] + hP dx (T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x = -\lambda S \left[\frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx \right] + hP dx (T - T_\infty)$$

$$\Rightarrow \lambda S \frac{d^2 T}{dx^2} dx = hP (T - T_\infty) dx$$

Equation d'une arête

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{hP}{\lambda S} (T - T_\infty)$$

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_x = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} + hP dx (T(x) - T_\infty)$$

 $T(x+dx)$: Développement de Taylor au 1^{er} Ordre:

$$T(x+dx) = T(x) + \frac{dT}{dx} dx + \frac{d^2 T}{dx^2} \frac{dx^2}{2!} + \dots$$

 dx petit $\rightarrow dx^2$ tend vers zéro

$$T(x+dx) = T(x) + \frac{dT}{dx} dx$$

$$\text{Donc: } \frac{T(x+dx) - T(x)}{dx} = \frac{dT}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} (T(x+dx)) = \frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

$$\frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} = \frac{dT}{dx} + \frac{d^2 T}{dx^2} dx$$

- A la base de l'ailette ($x = 0$) : $\theta(0) = (T(0) - T_\infty) = (T_0 - T_\infty) = \theta_0$

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_0$$

- A l'extrémité de l'ailette ($x = L$) : plusieurs cas peuvent être considérés :

a. température imposée à l'extrémité (condition aux limites de type Dirichlet) :

$$\theta(L) = (T(L) - T_\infty) = (T_2 - T_\infty) = \theta_2$$

cas particulier : ailette infiniment longue : $T(L) = T_\infty \Rightarrow \theta(L) = 0$

si $L \rightarrow \infty$ donc $T_2 \rightarrow T_\infty$ ainsi $\theta_2 \rightarrow 0$

$$\text{en } x = L \quad \theta(L) = \theta_2 = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow C_1 \rightarrow 0$$

$$\text{en } x = 0 \rightarrow \theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_0 \Rightarrow C_2 = \theta_0$$

Donc le champ de température à l'intérieur de l'ailette sera : $\frac{\theta(x)}{\theta_0} = e^{-mx}$

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-mx}$$

Le flux de chaleur évacué du solide par l'ailette, ϕ_0 , devient :

$$\phi_0 = -\lambda S \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = -\lambda S \theta_0 \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_{x=0} = \lambda S m \theta_0$$

En remplaçant m par son expression ($m = \sqrt{\frac{h p}{\lambda S}}$), on obtient :

$$\phi_0 = \sqrt{h \lambda S p} \theta_0$$

On peut donc introduire une résistance thermique de l'ailette infinie, R , telle que :

$$\phi_0 = \frac{(T_0 - T_\infty)}{R} = \frac{\theta_0}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{\lambda S m} = \frac{1}{\sqrt{h \lambda S p}}$$

$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{T(x) - 35}{200 - 35} = e^{-mx}$$

$$(T - 35)/(200 - 35) = e^{-11.89 \times 0.08}$$

$$T = 98.74^\circ\text{C}$$

$$\text{Posons : } \theta(x) = (T(x) - T_\infty) \text{ et } m^2 = \frac{h p}{\lambda S}$$

Pour une ailette rectangulaire d'épaisseur e et de largeur l : $S = el$ et $p = 2(e+l)$

Pour une ailette cylindrique de rayon R : $S = \pi R^2$ et $p = 2\pi R$

L'équation de l'ailette devient :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0$$

Cette équation différentielle est d'ordre 2, linéaire et homogène à coefficients constants, admet une solution générale de la forme :

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$= A \cosh(mx) + B \sinh(mx)$$

Application des conditions aux limites :

- A la base de l'ailette ($x = 0$) : $\theta(0) = (T(0) - T_\infty) = (T_0 - T_\infty) = \theta_0$

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_0$$

- A l'extrémité de l'ailette ($x = L$) :

la chaleur qui arrive par conduction est évacuée par convection à travers la surface de l'extrémité S_L .

$$-\lambda S_L \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h S_L (T_L - T_\infty)$$

se développe en : $C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = \frac{h}{\lambda m} (C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL})$

Après quelques calculs, on trouve :

$$C_1 = \frac{\theta_0 (1 - \beta) e^{mL}}{(1 + \beta) e^{mL} + (1 - \beta) e^{-mL}} ; C_2 = \theta_0 - C_1 ; \beta = \frac{h}{\lambda m}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)} + \beta (e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{(e^{mL} + e^{-mL}) + \beta (e^{mL} - e^{-mL})}$$

• **Le champ de température :**

$$T(x) - T_F + (T_0 - T_F) \frac{ch[m(L-x)] + \beta sh[m(L-x)]}{ch(mL) + \beta sh(mL)}$$

• **Le flux de chaleur par conduction :**

$$\frac{dT(x)}{dx} = (T_0 - T_F) m \frac{sh[m(L-x)] + \beta ch[m(L-x)]}{ch(mL) + \beta sh(mL)}$$

$$\Rightarrow \phi = \lambda S (T_0 - T_F) m \frac{sh[m(L-x)] + \beta ch[m(L-x)]}{ch(mL) + \beta sh(mL)}$$

Application des conditions aux limites :

- A la base de l'ailette ($x = 0$) : $\theta(0) = (T(0) - T_\infty) = (T_0 - T_\infty) = \theta_0$

$$\theta(0) = C_1 + C_2 = \theta_0$$

- A l'extrémité de l'ailette ($x = L$) :

la chaleur qui arrive par conduction est évacuée par convection à travers la surface de l'extrémité S_L .

$$-\lambda S_L \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=L} = h S_L (T_L - T_\infty)$$

se développe en :

$$C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL} = \frac{h}{\lambda m} (C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL})$$

Après quelques calculs, on trouve :

$$C_1 = \frac{\theta_0 (1 - \beta) e^{mL}}{(1 + \beta) e^{mL} + (1 - \beta) e^{-mL}} ; C_2 = \theta_0 - C_1 ; \beta = \frac{h}{\lambda m}$$

$$\frac{\theta(x)}{\theta_0} = \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)} + \beta (e^{m(L-x)} - e^{-m(L-x)})}{(e^{mL} + e^{-mL}) + \beta (e^{mL} - e^{-mL})}$$